УДК 51-3:338.24

РЕШЕНИЕ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ ЭКОНОМИКИ И ТЕОРИИ НАДЕЖНОСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЭМПИРИЧЕСКИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Т. А. Певцова, кандидат физико-математических наук, доцент (г. Саранск, Россия), pevtsovata@mail.ru

Е. А. Рябухина, кандидат педагогических наук, доцент кафедры систем автоматизированного проектирования факультета математики и информационных технологий ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва» (г. Саранск, Россия), ryabuhinaea@yandex.ru

О. А. Гущина, кандидат технических наук, доцент кафедры систем автоматизированного проектирования факультета математики и информационных технологий ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва» (г. Саранск, Россия), motuzoa@mail.ru

Рассмотрен ряд стохастических методов для решения прикладных задач в экономике и теории надежности с привлечением аппарата эмпирических распределений. Приведены примеры их использования в Microsoft Excel.

Ключевые слова: реализация, модель, вероятность, критерий, надежность, эмпирические распределения.

Информатизация общества является одной из закономерностей социального прогресса. В последние годы активно создаются информационные комплексы на базе персональных компьютеров и универсальных ЭВМ, без которых немыслимо решение современных задач информатизации. В этих условиях в рамках информатики научно-практического направления открываются новые возможности для создания информационных технологий в различных приложениях. Потребности экономической науки и практики сегодня являются основными предпосылками для широкого распространения технологий компьютерного моделирования в экономике.

Стохастические экономико-математические модели допускают наличие случайных воздействий на исследуемые показатели и используют

инструментарий теории вероятности и математической статистики для их описания.

Цель исследования состоит в демонстрации эффективности применения методов эмпирического распределения (гипергеометрического распределения, распределения Вейбулла–Гнеденко, гамма-распределения) при решении экономических задач.

Основным из популярных средств моделирования является табличный процессор Excel, позволяющий получать результаты вычислений в аналитическом и численном виде с возможностью их графического представления.

Актуальность выбранной тематики обусловлена повышением требований к качеству принятия управленческих решений в экономической сфере на базе широкого применения методов прикладной статистики, в частности эмпирического распределения.

Рассмотрим примеры применения методов эмпирического распределения, позволяющих повысить эффективность решения задач, представленных в источниках [1–5].

Пример **1.** Надежность комплекса проверяется серией последовательных независимых испытаний и признается удовлетворительной, если успешно выдержаны m испытаний.

Определить: 1) вероятность того, что комплекс успешно выдержит m испытаний; 2) от k_1 до k_2 испытаний; 3) среднее количество успешно выдержанных испытаний при условии: при вероятности успешно выдержать одно испытание p, $p = 0{,}85$ и $m = 4$; при $0{,}8 < p < 0{,}9$ и $k_1 = 2$, $k_2 = 4$.

1. Серия результатов проверки надежности комплекса имеет геометрическое распределение; тогда событие A – успешно выдержаны ровно m испытаний – примет вид: $A = \underbrace{УУ...УН}_{m+1}$ ($У$ – успех и $Н$ – неуспех) и по теореме умножения вероятностей независимых событий получаем при $p(У) = p$ и $q = 1 - p = p(Н)$: $p(A) = p(\underbrace{УУ...УН}_{m+1}) = \underbrace{pp...pq}_{m+1} = p^m q$.

При p = 0,85 и m = 4, q = 1 – 0,85 = 0,15 получим искомую вероятность $p(A)$: $p(A) = p^m q = 0{,}85^4 \cdot 0{,}15 = 0{,}522 \cdot 0{,}15 = 0{,}078$.

Обозначим через B событие, что успешно выдержаны от k_1 до k_2 испытаний. Тогда B имеет вид: $B = \underbrace{УУ...УН}_{k_1+1} + \underbrace{УУ...УН}_{k_1+2} + \ldots + \underbrace{УУ...УН}_{k_2+1}$ и по теореме сложения вероятностей несовместимых событий получаем:

$p(B) = p\,(\underbrace{УУ...УН}_{k_1+1}) + p\,(\underbrace{УУ...УН}_{k_1+2}) + \ldots + p\,(\underbrace{УУ...УН}_{k_2+1})$,

$p(B) = \underbrace{pp...pq}_{k_1+1} + \underbrace{pp...pq}_{k_1+2} + \ldots + \underbrace{pp...pq}_{k_2+1} = (p^{k1} + p^{k1+1} + \ldots + p^{k2})\, q =$

$= \left(\dfrac{p^{k_2}-1}{p-1} - \dfrac{p^{k_1}-1}{p-1}\right)\cdot q$, так как $q = 1 - p$ и $p = 1 - q$, то $p(B) = (1 - p^{k2}) - (1 - p^{k1})$ $= p^{k1} - p^{k2}$.

При $0{,}8 < p < 0{,}9$, от $k_1 = 2$ до $k_2 = 4$ получим при $q_1 = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$, и $p(B)$ $= p^{k1} - p^{k2} = 0{,}8^2 - 0{,}8^4 = 0{,}64 - 0{,}4096 = 0{,}2\,304$;

при $p = 0{,}9$ получим $p(B) = p^{k1} - p^{k2} = 0{,}9^2 - 0{,}9^4 = 0{,}81 - 0{,}6\,561 = 0{,}1\,539$.

Таким образом, при изменении вероятности в пределах $0{,}8 < p < 0{,}9$ соответствующая вероятность $p(k_1 \le k \le k_2)$ того, что успешно будут выдержаны от $k_1 = 2$ до $k_2 = 4$ испытаний, изменяется в пределах: $0{,}1\,539 < p\,(2 \le k \le 4) < 0{,}2\,304$.

В экономике и теории надежности широкое применение находит гипергеометрическое распределение, которое возвращает вероятность заданного количества m успехов в выборке. Если объем генеральной совокупности равен N, количество успехов в ней равно N_1, объем выборки равен n, то искомая вероятность $p = p\,(m; n; N_1; N)$ находится по формуле: $p\,(m; n; N_1; N) = \dfrac{C_{N_1}^{m} \cdot C_{N-N_1}^{n-m}}{C_N^n}$ и, если воспользоваться стандартной функцией в интегрированной среде MS Excel, то с помощью стандартной функции ГИПЕРГЕОМЕТ эта вероятность вычисляется по формуле: $p = p\,(m; n; N_1; N) =$ ГИПЕРГЕОМЕТ(m; n; N_1; N).

Пример **2.** В регионе N хозяйств, N_1 из которых специализируются на производстве мясомолочной продукции (событие А), остальные – на производстве продукции растениеводства (событие В). По плану регион должен ввести в n хозяйствах дополнительные мощности.

Определить: 1) вероятность того, что m из них будут мясомолочного направления (событие А); 2) решить задачу со следующими числовыми данными: а) $N = 20$, $N_1 = 8$, $n = 4$, $m = 1$; б) $N = 100$, $N_1 = 80$, $n = 20$, $m = 5$.

1. Воспользуемся гипергеометрическим распределением $p = p\ (m;\ n;\ N_1;\ N)$, которое вычисляется по формуле:

$p\ (m;\ n;\ N_1;\ N) = \dfrac{C_{N_1}^{m} \cdot C_{N-N_1}^{n-m}}{C_N^n}$; или с помощью стандартной функции ГИПЕРГЕОМЕТ: $p = p\ (m;\ n;\ N_1;\ N)$ = ГИПЕРГЕОМЕТ(m; n; N_1; N).

2. Решим задачу с числовыми данными:

а) $N = 20$, $N_1 = 8$, $n = 4$, $m = 1$; p = ГИПЕРГЕОМЕТ(1; 4; 8; 20) = 0,3 633;

б) $N = 100$, $N_1 = 80$, $n = 20$, $m = 15$; p = ГИПЕРГЕОМЕТ(15; 20; 80; 100) = 0,1 920.

В теории надежности характер изменения параметров надежности отдельных объектов и систем различается в зависимости от периода жизненного цикла, причем наиболее заметны изменения в начале и конце цикла. Если отказы объектов системы имеют *экспоненциальный* закон распределения *с одной и той же интенсивностью* λ_o, притом отказ системы происходит, когда отказывают *не менее k ее объектов*, то надежность системы подчиняется другому закону, близкому к экспоненциальному, – гамма-распределению с функцией распределения $F(t) = 1 - \sum_{m=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{\lambda t}$ и плотностью распределения вероятностей $f(t) = \frac{\lambda_o^k t^{k-1}}{\Gamma(k)} e^{-\lambda_o t}$; числовые характеристики $M(T) = \frac{k}{\lambda}$ – математическое ожидание и $D(T) = \frac{k}{\lambda^2}$ – дисперсия.

Пример **3.** Производственный цикл обеспечивается бесперебойной работой четырех автоматов с интенсивностью отказов λ_o = 0,01, причем цикл нарушается, когда отказывают не менее а) 2 автоматов; б) 3 автоматов.

Определить параметры надежности данного производственного цикла. Надежность производственного цикла подчиняется гамма-распределению.

А) При k = 2, λ_o = 0,01 интегральная функция распределения имеет вид:

$$F(t) = 1 - \sum_{m=0}^{1} \frac{(0{,}01t)^m}{m!} e^{-0{,}01t} = 1 - \frac{(0{,}01t)^0}{0!} e^{-0{,}01t} - \frac{(0{,}01t)^1}{1!} e^{-0{,}01t} = 1 - e^{-0{,}01t}(1 - 0{,}01t)$$

с плотностью распределения вероятностей:

$$f(t) = \frac{\lambda_o^k t^{k-1}}{\Gamma(k)} e^{-\lambda_o t} = \frac{0{,}01^2 t}{\Gamma(2)} e^{-0{,}01t} \approx 0{,}0005t \cdot e^{-0{,}01t}$$

и числовыми характеристиками $M(T) = \frac{2}{0{,}01} =$ 200 у. е. – это средняя продолжительность производственного цикла, $D(T) = \frac{2}{0{,}01^2} =$ 2000 – его дисперсия, и $\sigma(T)$ = $\sqrt{D(T)} = \sqrt{200} \approx 14{,}2$ – среднее квадратическое отклонение.

Б) При k = 3, λ_o = 0,01 интегральная функция распределения имеет вид:

$$F(t) = 1 - \sum_{m=0}^{2} \frac{(0{,}01t)^m}{m!} e^{-0{,}01t} = 1 - \frac{(0{,}01t)^0}{0!} e^{-0{,}01t} - \frac{(0{,}01t)^1}{1!} e^{-0{,}01t} - \frac{(0{,}01t)^2}{2!} e^{-0{,}01t} =$$

$= 1 - e^{-0{,}01t}(1 - 0{,}01t - 0{,}0005t^2)$; плотность распределения вероятностей:

$$f(t) = \frac{\lambda_o^k t^{k-1}}{\Gamma(k)} e^{-\lambda_o t} = \frac{0{,}01^3 t^2}{\Gamma(3)} e^{-0{,}01t} \approx 0{,}0000005t \cdot e^{-0{,}01t};$$

числовые характеристики: $M(T) = \frac{3}{0{,}01} =$ 300 у. е. – средняя продолжительность производственного цикла, $D(T) = \frac{3}{0{,}01^2} =$ 3000 – его дисперсия, и $\sigma(T)$ = $\sqrt{D(T)} = \sqrt{3000} \approx 54{,}77$ – его среднее квадратическое отклонение.

При исследовании параметров надежности математических моделей, (например, среднего времени наработки на отказ какого-либо элемента, устройства, объекта) хороший результат дает применение распределения

Вейбулла (Вейбулла–Гнеденко), близкого к гамма-распределению. Интегральная и дифференциальная функции распределения Вейбулла зависят от параметров m и λ и имеют соответственно вид:

$F(t,m,\lambda)=1-e^{-(\lambda t)^{\alpha}}$ и $f(t,m,\lambda)=m\lambda(\lambda t)^{\alpha-1}e^{-(\lambda t)^{\alpha}}$;

числовые характеристики $M(T)$ и $D(T)$ определяются по формулам: $M(T)=\dfrac{\Gamma\left(1+\dfrac{1}{m}\right)}{\lambda}$ – математическое ожидание и $D(T)=\dfrac{1}{\lambda^2}\cdot\left[\Gamma\left(1+\dfrac{2}{m}\right)-\Gamma^2\left(1+\dfrac{1}{m}\right)\right]$ – дисперсия; при m = 1 распределение Вейбулла – это экспоненциальное распределение с параметром λ.

Для примера найдем значение функции распределения $F(t,m,\lambda)$ при значениях параметров m = 20, λ= 0,01:

$F(t,m,\lambda)=$ $F(105,20,0,01)=1-e^{-(0,01\cdot 105)^{20}}=$ ВЕЙБУЛЛ(105; 20; 1/0,01; ИСТИНА) = 0,930 – это вероятность того, что период безотказной работы производственного процесса будет не более t = 105 у. е., соответствующее значение плотности распределения $f(t,m,\lambda)$ при этом равно:

$f(105,20,0,01)=$ ВЕЙБУЛЛ(105; 20; 1/0,01; ЛОЖЬ) = 0,0 356.

Рассмотрим еще одну экономическую задачу на применение гамма-распределения.

Пример **4.** Производство региона обеспечивается бесперебойной работой 100 его производственных мощностей с интенсивностью отказов λ_o, причем производство нарушается, когда отказывают не менее а) 2 автоматов; б) 3 автоматов.

Определить параметры надежности данного производственного цикла, учитывая, что она подчиняется гамма-распределению.

А) В этом случае k = 2, λ_o = 0,01 и интегральная функция распределения имеет вид:

$$F(t)=1-\sum_{m=0}^{1}\frac{(0,01t)^m}{m!}e^{-0,01t}=1-\frac{(0,01t)^0}{0!}e^{-0,01t}-\frac{(0,01t)^1}{1!}e^{-0,01t}=1-e^{-0,01t}(1-0,01t);$$

соответственно плотность распределения вероятностей будет определяется как:

$$f(t)=\frac{\lambda_o^k t^{k-1}}{\Gamma(k)}e^{-\lambda_o t}=\frac{0{,}01^2 t}{\Gamma(2)}e^{-0{,}01t}\approx 0{,}0005t\cdot e^{-0{,}01t}.$$

Выясним числовые характеристики $M(T)=\frac{2}{0{,}01}=200$ у. е. – это средняя продолжительность производственного цикла, $D(T)=\frac{2}{0{,}01^2}=2000$ – его дисперсия, и $\sigma(T)=\sqrt{D(T)}=\sqrt{200}\approx 14{,}2$ – среднее квадратическое отклонение.

Б) В этом случае $k = 3$, $\lambda_o = 0{,}01$ и интегральная функция распределения имеет вид:

$$F(t)=1-\sum_{m=0}^{2}\frac{(0{,}01t)^m}{m!}e^{-0{,}01t}=1-\frac{(0{,}01t)^0}{0!}e^{-0{,}01t}-\frac{(0{,}01t)^1}{1!}e^{-0{,}01t}-\frac{(0{,}01t)^2}{2!}e^{-0{,}01t}=$$

$$=1-e^{-0{,}01t}(1-0{,}01t-0{,}0005t^2)$$

соответственно плотность распределения вероятностей выглядит так:

$$f(t)=\frac{\lambda_o^k t^{k-1}}{\Gamma(k)}e^{-\lambda_o t}=\frac{0{,}01^3 t^2}{\Gamma(3)}e^{-0{,}01t}\approx 0{,}0000005t\cdot e^{-0{,}01t},$$

числовые характеристики $M(T)=\frac{3}{0{,}01}=300$ у. е. – математическое ожидание, $D(T)=\frac{3}{0{,}01^2}=3000$ – дисперсия, и $\sigma(T)=\sqrt{D(T)}=\sqrt{3000}\approx 54{,}77$ – его среднее квадратическое отклонение.

Результаты представленного исследования могут быть использованы при анализе экономических задач различной направленности.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Копыл В. И.* Логистика управления запасами с помощью Excel: производств.-практ. изд. / В. И. Копыл. – Минск: Харвест, 2007. – 64 с.

2. *Папков Б. В.* Надежность и эффективность электроснабжения / Б. В. Папков. – Н. Новгород: НГТУ, 1996. – 212 с.

3. *Папков Б. В.* Надежность электроснабжения: комплекс учеб.-метод. материалов / Б. В. Папков. – Н. Новгород: НТБ НГТУ, 2007. – 212 с.

4. *Певцова Т. А.* Вычисление индекса сезонности / Т. А. Певцова, Е. А. Рябухина, О. А. Гущина // Вестник Мордовского университета. – 2015. – Т. 25, № 4. – С. 18–36.

5. *Певцова Т. А.* Сетевые модели в теории надежности [Электронный ресурс] / Т. А. Певцова, Е. А. Рябухина, О. А. Гущина // Studium. – 2016. – № 2 (39). – Режим доступа: http://saransk.ruc.su/upload/medialibrary/845/pevcova_ryabuhina_gushina01.pdf (Дата обращения: 02.03.2018).