

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАВИСИМОСТИ ТОЧНОСТИ НАХОЖДЕНИЯ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ ОТ КОЛИЧЕСТВА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ТОЧЕК ПРИ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ПОЛИНОМОМ НЬЮТОНА

К. О. Наумкина, магистрант кафедры инфокоммуникационных технологий и систем связи института электроники и светотехники ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарева»

Рассматриваются проблемы зависимости точности нахождения значения функции от количества экспериментальных точек при интерполяции полиномом Ньютона.

Ключевые слова: моделирование систем и процессов, обработка сигналов, точность нахождения значения функции.

При моделировании систем и процессов большое внимание уделяется обработке получаемых сигналов. Часто требуется знать средние значения какой-то характеристики, меру отклонения от табличных данных. Например, когда задана сеточная функция (в виде таблицы), то желательно получить аналитическую зависимость, осуществляющую наилучшее приближение к табличным данным. В таком случае необходимо применение интерполяции данных. Функция $\varphi(x)$ будет являться интерполирующей для $f(x)$ на заданном отрезке, если её значения в узлах интерполяции x_0, x_1, \dots, x_n , будут совпадать с заданными значениями y_0, y_1, \dots, y_n , т.е. график функции $\varphi(x)$ в этих точках будет касаться или пересекать график $f(x)$ [1].

Зная аналитическую зависимость, можно рассчитать значение функции в любой точке, не являющейся узлом интерполяции, что является распространенной практической задачей. В связи с этим, можно считать, что важным показателем качества интерполяции является модуль разности между значениями интерполирующей функции и истинной функции в какой-либо заданной точке.

Рассмотрим интерполяцию таблично заданной функции полиномом Ньютона на примере экспоненциальной $y=\exp(x)$, логарифмической $y=\lg(x)$ и степенной $y=5x^5$ функций. Исследуем зависимость точности приближения

значения интерполируемой функции к значению истинной в контрольной точке от количества экспериментальных точек

На основе программы [2] создадим в системе MATLAB программу для исследования интересующей зависимости.

```
clc, close
x = 0:2:5 ;% задание узлов интерполяции
y =exp(x);% задание значения функции в узлах интерполяции
N = length(x);% Число экспериментальных точек
fprintf('Количество экспериментальных точек: %g\n', N);
%Формирование таблицы разностных отношений
D=zeros(N,N);
D(:,1) =y';
for j =2 : N
    for k = j: N
        D(k,j)=(D(k,j-1)-D(k-1,j-1))/(x(k)-x(k-j+1));
    end
end
%Определение коэффициентов интерполирующего полинома
C=D(N,N);
for k=(N-1):-1:1
    C= conv(C, poly(x(k)));
    m=length(C);
    C(m)=C(m)+D(k,k);
end
fprintf('Коэффициенты интерполирующего полинома: %g\n',C)
disp(['Коэффициенты интерполирующего полинома: ',num2str(C)])
% Формирование интерполяционного полинома
p=C;
xx=0.02:0.01:5;
h=polyval(p,xx);
t=1.35; % контрольная точка
zt=polyval(p,t); % значение функции в контрольной точке
disp(['Значению x = ',num2str(t),' соответствует значение y = ',... num2str(zt)])
f=exp(xx); % тестовая функция
plot(x, y, 'o', t, zt, '*', xx, h, 'r', xx, f, 'c')% построение графиков тестовой функции,
%интерполирующего полинома, значения таблично заданной функции
set(gca, 'FontSize', 10)
legend('Узлы интерполяции', 'Контрольная точка', 'Интерполирующий полином',
'Тестовая функция',0)
```

Протестируем программу для функции $y = \exp(x)$ на интервале $[0;5]$ Вычислим значения контрольной точки $x=1,35$ при интерполировании полиномами различной степени. Построим в одном окне график тестовой функции и интерполирующего полинома, а также укажем на графике контрольную точку. Сравним полученное значение и истинным: $\exp(1,75)=3,85743$.

Результат работы программы для трех экспериментальных точек:

Количество экспериментальных точек: 3

Коэффициенты интерполирующего полинома: 5.1025 -7.0105 1

Значению $x = 1.35$ соответствует значение $y = 0.83516$

Модуль разности между найденным значением в контрольной точке и истинным:
3.02226

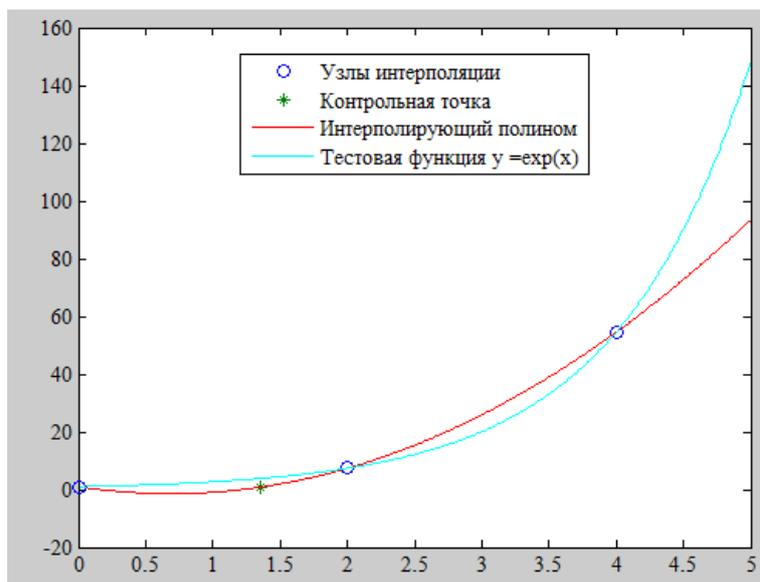


Рисунок 1 – Результат работы программы для трех экспериментальных точек

Результат работы программы для шести экспериментальных точек:

Количество экспериментальных точек: 6

Коэффициенты интерполирующего полинома:

0.12482 -0.885 3.035 -3.3061 2.7495 1

Значению $x = 1.35$ соответствует значение $y = 3.774$

Модуль разности между найденным значением в контрольной точке и истинным:
0.0834651

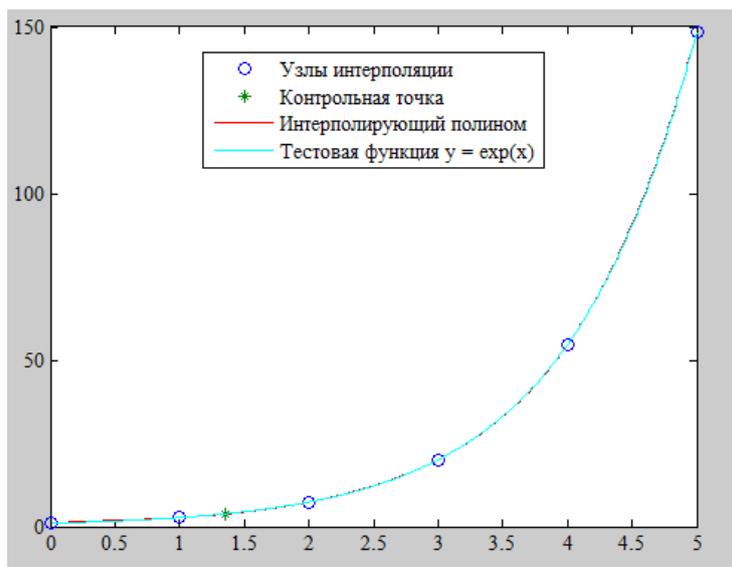


Рисунок 2– Результат работы программы для шести экспериментальных точек

Результат работы программы для десяти экспериментальных точек:

Количество экспериментальных точек: 10

Коэффициенты интерполирующего полинома:

3.6665e-005 -0.00047846 0.0037293 -0.012917 0.04399 -0.013359
0.21723 0.47512 1.0049 1

Значению $x = 1.35$ соответствует значение $y = 3.8574$

Модуль разности между найденным значением в контрольной точке и истинным:
1.68552e-005.

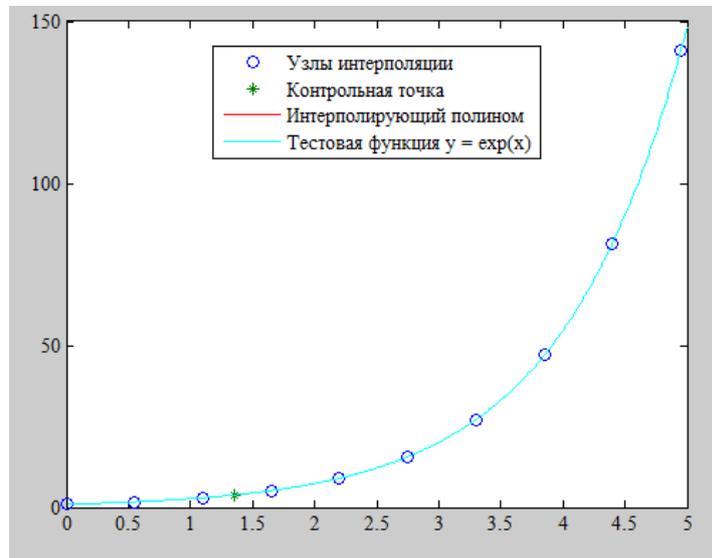


Рисунок 3 – Результат работы программы для десяти экспериментальных точек

Результат работы программы для тридцати экспериментальных точек:

Количество экспериментальных точек: 30

Коэффициенты интерполирующего полинома: -3.8227e-016 2.7242e-014 -

9.2484e-013 1.9906e-011 -3.0499e-010 3.5409e-009 -3.2374e-008 2.3917e-007

-1.4535e-006 7.3606e-006 -3.1346e-005 0.00011299 -0.00034627 0.00090447

-0.0020158 0.0038313 -0.0061985 0.0085072 -0.0098549 0.009569 -

0.0077124 0.0051273 -0.002525 0.0025365 0.0079629 0.041754

0.16665 0.5 1 1

Значению $x = 1.35$ соответствует значение $y = 3.8574$

Модуль разности между найденным значением в контрольной точке и истинным:
4.44089e-016

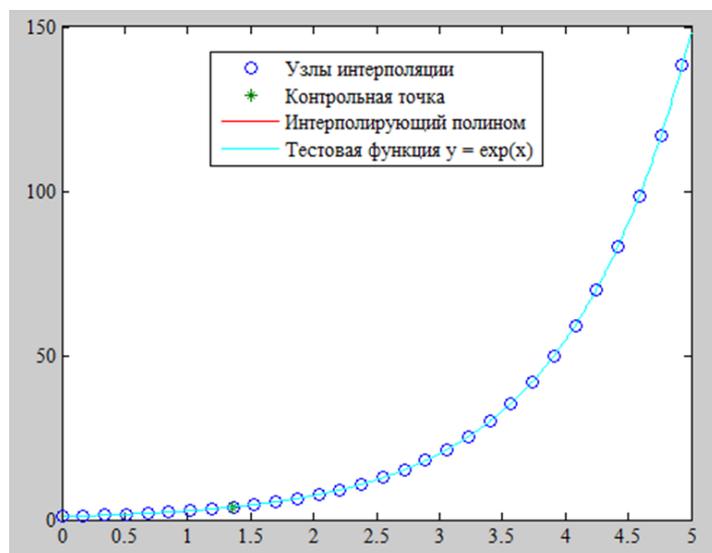


Рисунок 4 – Результат работы программы для тридцати экспериментальных точек

Результат работы программы для сорока экспериментальных точек:

Количество экспериментальных точек: 40

Коэффициенты интерполирующего полинома: 1.324858e-016 -1.256165e-014
 5.744622e-013 -1.687824e-011 3.580537e-010 -5.843603e-009 7.634033e-008 -
 8.201136e-007 7.386441e-006 -5.658249e-005 0.0003727146 -0.002129159
 0.01061841 -0.04647128 0.179197 -0.6106968 1.84348 -
 4.936535 11.73667 -24.78024 46.44579 -77.20624
 113.6437 -147.7981 169.3412 -170.3053 149.6498 -
 114.2499 75.259 -42.4109 20.23078 -8.060771
 2.637485 -0.6913774 0.1500174 0.0200835 0.1689515
 0.4998516 1.000004 1

Значению $x = 1.35$ соответствует значение $y = 3.8574$

Модуль разности между найденным значением в контрольной точке и истинным: $5.02265e-013$

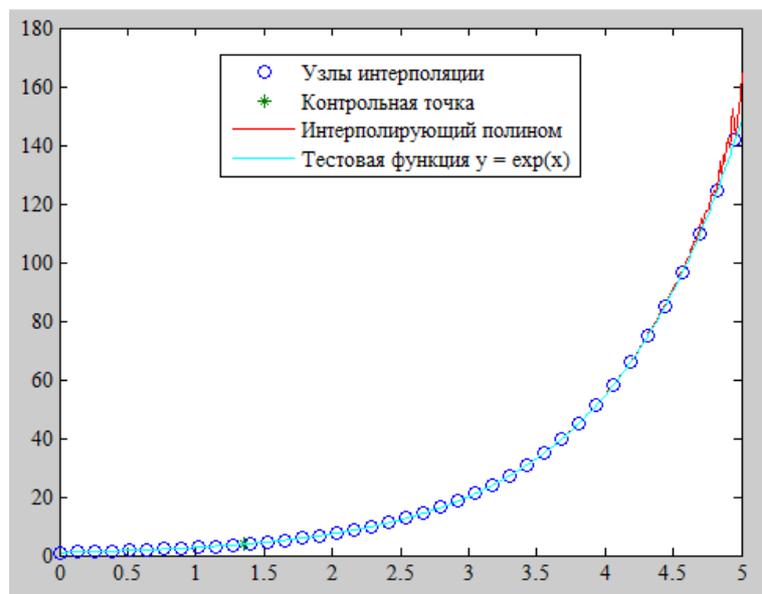


Рисунок 6 – Результат работы программы для сорока экспериментальных точек

Дальнейшее увеличение числа экспериментальных точек ведет к полному несоответствию интерполирующего полинома оригинальной функции.

Для ста экспериментальных точек модуль разности между найденным значением в контрольной точке и истинным составляет $2.5828e+024$.

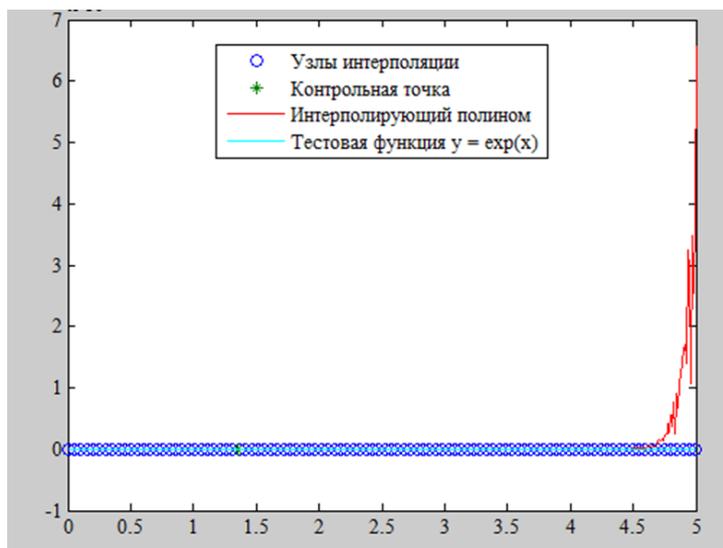


Рисунок 7 – Результат работы программы для ста экспериментальных точек
 Проведем аналогичную работу с функциями $y=\lg(x)$, $y=5x^5$, занесем результаты в таблицу 1.

Таблица 1. Значения модуля разности между найденным значением в контрольной точке и истинным для трех тестовых функций.

Кол-во точек / Тестовая функция	$y=\exp(x)$	$y=\log(x)$	$y=5*x^5$
3	3,02226	1,32233	441.765
6	0,0834651	0,143893	6,70726
10	1,68552E-05	0,00639677	1.39425
30	4,44089E-16	2,33139E-09	1,77636E-14
40	5,02265E-13	6,52444E-07	4,47749E-10
50	9,66076E-06	0,00139586	0,000672227
100	2,5828E+24	1,89895E+22	1,66332E+25

Анализ таблицы показывает, что найденное значение в контрольной точке максимально близко к истинному в тех экспериментах, в которых количество экспериментальных точек находится в интервале от 10 до 50. Однако анализ построенных в ходе работы графиков свидетельствует об искажении графика интерполирующей функции относительно графика тестовой функции при числе экспериментальных точек более 30. Из проделанной работы следует вывод, что лучшим условием для интерполяции

функции с помощью полиномом Ньютона является количество экспериментальных точек в интервале [10;30].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Афонин В. В, Никулин В. В. Методы моделирования и оптимизации с примерами на языке C/C++ и Matlab: учеб. пособие / В. В. Афонин, В. В. Никулин. – Саранск : Изд-во Мордов. ун-та, 2015.

2. Мэтьюз Дж, Финк Куртис. Численные методы. Использование MATLAB, 3-е издание. : Пер. с англ – М.: Издательский дом «Вильямс», 2001. – 720с.