

СЕТЕВЫЕ МОДЕЛИ В ТЕОРИИ НАДЕЖНОСТИ

Т. А. Певцова, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры и геометрии факультета математики и информационных технологий ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва»

Е. А. Рябухина, кандидат педагогических наук, доцент кафедры систем автоматизированного проектирования факультета математики и информационных технологий ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва»

О. А. Гущина, кандидат технических наук, доцент кафедры систем автоматизированного проектирования факультета математики и информационных технологий ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва»

Рассматриваются сетевые модели, используемые в теории надежности. Представлены графические способы решения наиболее распространенных типов задачи поиска оптимального решения экономических задач.

Ключевые слова: сетевые модели, оптимальное решение, теория надежности.

В данной работе рассмотрены наиболее интересные задачи теории надежности и аспекты исследования, конструирования и реализации этих оптимальных моделей. К ним можно отнести задачи: нахождения кратчайшего пути между двумя вершинами связного графа; выбора оптимального маршрута перевозок однородного груза; перевода динамической системы из одного состояния в другое состояние; конструирования единой сети (РП, подстанций, узлов нагрузки или электростанций), соответственно кратчайшей длины или наименьшей стоимости и т. д.; построения сетевой модели минимальной длины, соответственно минимальной стоимости, минимальных потерь и т. д. [2, с. 14].

Рассмотрим алгоритмы решения этих задач оптимизации в теории надежности.

Постановка задачи конструирования кратчайшей сети: предположим, что данной модели оптимизации соответствует граф $G = \{V, E\}$ с вершинами $V = \{v_i\}, \overline{1, n}$ и ребрами $E = \{e_j\}, \overline{1, m}$.

Очевидно, что если число узловых точек сети небольшое, то задачу можно решить простым перебором. В противном случае, при большом числе узловых точек сети, подобное решение становится довольно сложным. В терминах теории графов эта задача формулируется следующим образом.

Пусть $G = \{V, E\}$ – связный (неориентированный) граф, каждому ребру которого приписано некое неотрицательное число c_{ij} ; c_{ij} – мера данного ребра (это может быть расстояние между узлами или стоимость обмена информацией между этими узлами и т. д.). Требуется построить такой подграф T , у которого сумма мер c_{ij} имеет минимальное значение:

$$M(T) = \sum c_{ij} \rightarrow \min \quad (1)$$

Замечание 1. Очевидно, что такой граф должен быть деревом, таким, чтобы удаление одного из его ребер не нарушало бы связности графа, так как в противном случае граф должен будет содержать цикл и удаление одного из ребер нарушит его связность.

Для решения этой задачи применяется следующий стандартный алгоритм Краскала.

1. Упорядочим ребра исходного графа в порядке неубывания их мер.
2. За первое ребро принимается ребро с наименьшей мерой (если их несколько, то выбирается любое из них). Затем выбирается второе ребро, отличное от первого также с наименьшей мерой, не образующее с ним цикла и т. д.
3. Если выбраны уже k ребер, то $(k + 1)$ -е ребро выбирается так, что оно должно быть отличным от выбранных ранее ребер также с наименьшей мерой и не образующим с ними цикла и т. д.
4. Процесс повторяется до тех пор, пока не будет построено все дерево минимальной стоимости (длины).

Замечание 2. В теории надежности с построением минимального дерева решение задачи не завершается, а продолжается. Затем решается вторичная задача оптимизации дерева T , что позволяет сократить длину дерева T от 7 до 12 % – это так называемая задача Штейнера.

Идея данной задачи заключается в конструировании дерева \mathbf{L} , которое «стягивает» множество вершин минимального дерева \mathbf{T} таким образом, чтобы сумма мер ребер дерева \mathbf{L} удовлетворяла неравенству: $M(\mathbf{L}) < M(\mathbf{T})$. Это достигается за счет введения искусственных вершин (их можно интерпретировать как транзитные устройства, распределительные пункты, клеммные коробки и т. д.), т. е. изменения структуры дерева \mathbf{T} .

Алгоритм решения задачи Штейнера следующий.

1. Каждая искусственная вершина w_i при конструировании дерева \mathbf{L} должна иметь степень 3, причем три ребра, инцидентные этой вершине, должны образовывать между собой угол 120° . Эта вершина является центром треугольника, с вершинами которого она связана. Причем может оказаться, что отдельные вершины этого треугольника также будут искусственными.

2. Максимальное число искусственных вершин w_i при конструировании дерева \mathbf{L} определяется соотношением $0 \leq M(\mathbf{L}) \leq n - 2$, где n – число вершин исходного графа \mathbf{T} .

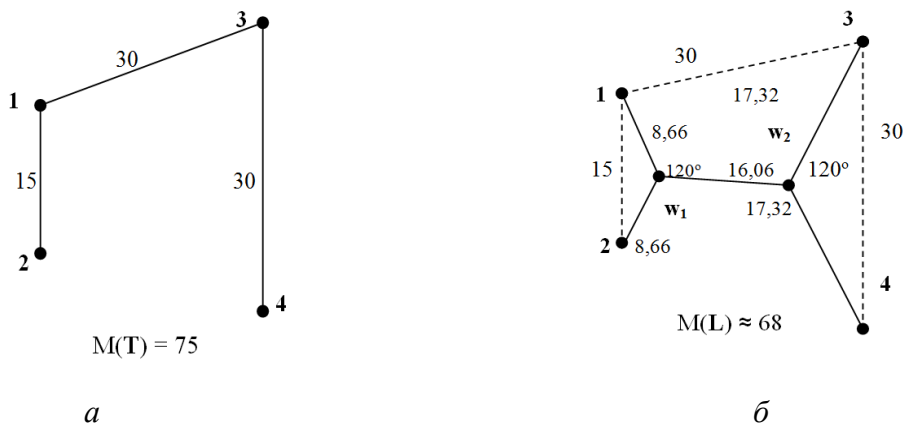
Пример 1. Даны граф $G = \{V, E\}$ и граф \mathbf{T} – минимальное дерево, покрывающее его (рис. 1а). Мера графа \mathbf{T} : $M(\mathbf{T}) = 15 + 30 + 30 = 75$. Требуется произвести оптимизацию этого графа в соответствии с вышеуказанным алгоритмом.

Решение. Будем конструировать дерево \mathbf{L} . Для этого введем две искусственные вершины w_1 и w_2 ; рассмотрим треугольник с вершинами $\{1, 2, w_1\}$ (рис. 1б). Из рисунка видно, что это будет равнобедренный треугольник, два угла при основании которого равны 30° . Для решения воспользуемся теоремой синусов, согласно которой отношения длин сторон треугольника к синусам противоположных углов равны между собой:

$$\frac{\ell}{\sin \alpha} = \frac{m}{\sin \beta} \quad (2)$$

По этой теореме находим длины ребер $\{1, w_1\} = \{2, w_1\} = \ell$:

$$\frac{\ell}{\sin 30^\circ} = \frac{15}{\sin 120^\circ} \rightarrow \ell = \frac{15 \cdot \sin 30^\circ}{\sin 120^\circ} = \frac{15 \cdot 1/2}{\sqrt{3}/2} = 5\sqrt{3} \approx 8,66.$$

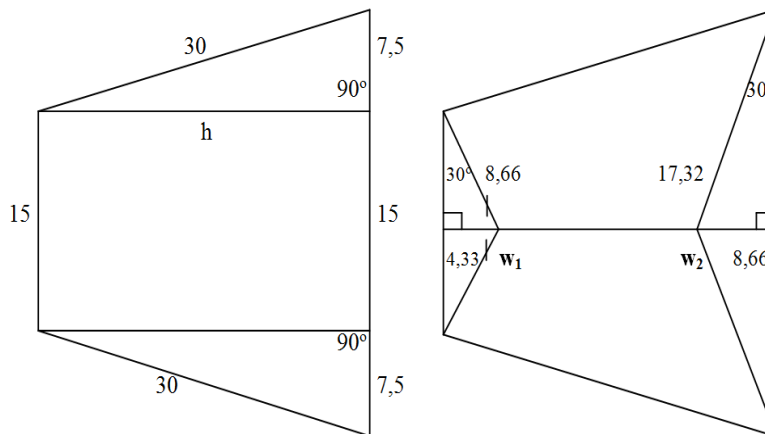


Р и с. 1. Граф **T** (а), дерево **L** (б)

Аналогично из равнобедренного треугольника с вершинами $\{3, 4, w_2\}$ находим длины ребер $\{3, w_2\} = \{4, w_2\} = m$:

$$\frac{\ell}{\sin \alpha} = \frac{m}{\sin \beta} \rightarrow \frac{m}{\sin 30^\circ} = \frac{30}{\sin 120^\circ} \rightarrow m = \frac{30 \cdot \sin 30^\circ}{\sin 120^\circ} = \frac{30 \cdot 1/2}{\sqrt{3}/2} = 10\sqrt{3} \approx 17,32.$$

Теперь можно найти длину ребра (w_1, w_2) между искусственными вершинами w_1 и w_2 (рис. 2):



Р и с. 2. Построение ребра (w_1, w_2) между искусственными вершинами w_1 и w_2

Находим длину $h = \sqrt{30^2 - 7,5^2} = \sqrt{843,75} \approx 29,05$, и, наконец, длину ребра w_1w_2 : $w_1w_2 = 29,05 - (4,33 + 8,66) \approx 16,06$, следовательно, $M(\mathbf{L}) = 8,66 + 8,66 + 16,06 + 17,32 + 17,32 = 68,02 \approx \mathbf{68}$.

Теперь найдем величину *выигрыша* от этой оптимизации ΔN :

$$\Delta N = M(\mathbf{T}) - M(\mathbf{L}) = 75 - 68 = 7.$$

Замечание 3. Нетрудно заметить, что данная вторичная оптимизация выгодна в той ситуации, когда затраты на построение дополнительных сооружений в виде искусственных вершин намного меньше, чем величин

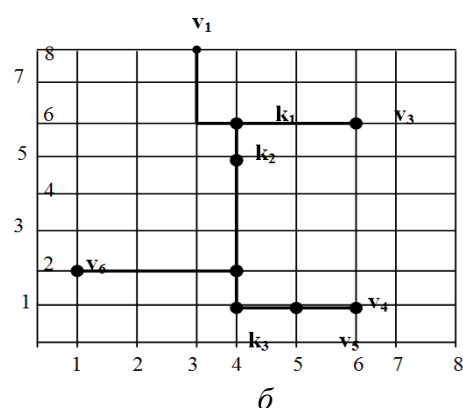
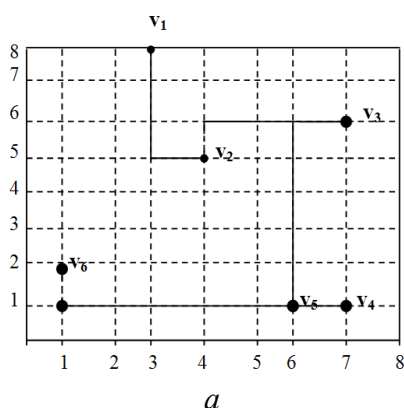
выигрыша (в примере 7 условных единиц).

Замечание 4. Из практики известно, что реальные инженерные коммуникации (такие как электрические сети, трассы линий передач и т. д.) прокладываются обычно под прямым углом друг к другу (а не под углом 120°). В этом случае расстояние между узлами сети с координатами (x_1, y_1) и (x_2, y_2) вычисляют не по общепринятой формуле расстояния между двумя точками $d_{12} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$, а по формуле:

$$d_{12} = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|. \quad (3)$$

При решении задачи Штейнера в этом случае через каждую вершину дерева T проводятся горизонтальные и вертикальные прямые, и некоторые их пересечения можно рассматривать как искусственные вершины.

Пример 2. Дан граф-дерево $T = \{V, E\}$ с вершинами $V = \{v_j\}, j = \overline{1,6}$ (рис. 3а). Требуется произвести минимизацию этого графа по алгоритму Штейнера. Решение задачи приведено ниже (рис. 3б).



Р и с. 3. Граф-дерево $T = \{V, E\}$ с вершинами $V = \{v_j\}, j = \overline{1,6}$ (а), решение задачи (б)

Оптимизация дерева T проведена стандартным образом: для этого надо провести необходимые горизонтальные и вертикальные прямые и ввести три искусственные вершины: k_1, k_2 и k_3 .

Замечание 5. Решение подобных инженерных задач удобно выполнять с использованием современных компьютерных технологий и соответствующего программного инструментария, например программных средств интегрированных сред MS Project 2003, WS Excel, MahtCad, MahtLab и др.

Продолжим рассмотрение других моделей оптимизации. Первой

рассмотрим задачу нахождения кратчайшего пути.

Рассмотрим связный граф $G = \{V, E\}$ с ребрами одинаковой (единичной) длины. Если граф содержит небольшое число вершин и ребер, то задача решается простым перебором, но в общем случае, когда граф сложный, нужен соответствующий алгоритм решения. Идея алгоритма рассмотренных ниже моделей оптимизации заключается в приписывании каждой вершине v_i индекса λ_i , равного длине кратчайшего пути из данной вершины в конечную.

Алгоритм нахождения кратчайшего пути следующий.

1. Начинаем с конца: конечной вершине v_0 присваиваем индекс λ_0 : $\lambda_0 = 0$.

2. Всем вершинам, принадлежащим множеству ребер, инцидентных данной вершине $v_0 \in V$ (напоминаем, что это все ребра, связанные с вершиной v_0), приписывается индекс λ_1 : $\lambda_1 = \lambda_0 + 1 = 1$.

3. Всем вершинам, еще не имеющим индекса и принадлежащим множеству ребер, инцидентных вершинам $v_i \in V$ из п. 2, приписываем уже индекс λ_2 : $\lambda_2 = \lambda_1 + 1 = 2$.

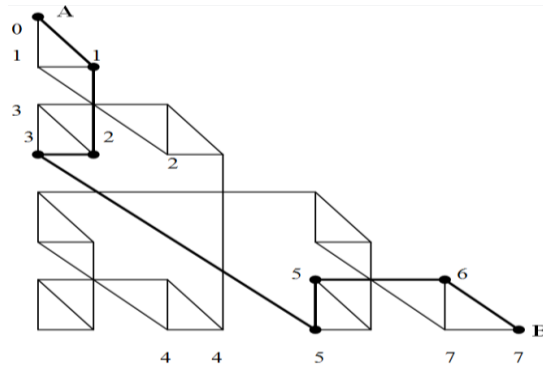
4. Всем вершинам, еще не имеющим индекса и принадлежащим множеству ребер, инцидентных вершинам $v_i \in V$ из п. 3, приписываем индекс λ_3 : $\lambda_3 = \lambda_2 + 1 = 3$ и т. д.

5. Если сделаны i шагов, то на следующем $(i + 1)$ -м шаге приписываем индекс λ_{i+1} : $\lambda_{i+1} = \lambda_i + 1$ всем вершинам, еще не имеющим индекса и принадлежащим множеству ребер, инцидентных вершинам $v_i \in V$ из предыдущих пунктов. Повторяем операцию до тех пор, пока не будет помечена начальная вершина v_n . Очевидно, что ее индекс λ_n будет равен длине кратчайшего пути из начальной вершины в конечную. Нетрудно заметить, что сам путь будет определяться как путь, ведущий из начальной вершины в конечную в направлении убывания индексов. Чтобы было понятно, рассмотрим пример данной оптимизационной модели.

Пример 3. Дан граф с ребрами одинаковой (единичной) длины с начальной вершиной А и конечной вершиной В. Требуется найти путь μ_{AB}

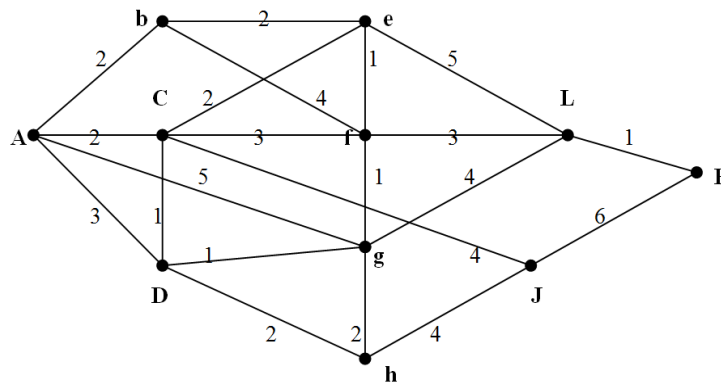
минимальной длины: $L(\mu) = \sum_{e \in \mu} L(e) \rightarrow \min$.

Решение. На рисунке представлено графическое решение задачи нахождения кратчайшего пути на графе с ребрами одинаковой единичной длины из начальной вершины **A** в конечную вершину **B** (рис. 4). Кратчайший путь выделен жирным.



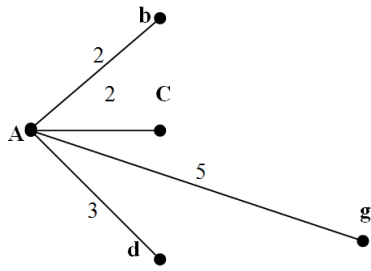
Р и с. 4. Графическое решение задачи нахождения кратчайшего пути на графе

Пример 4. Рассмотрим также графический метод нахождения кратчайшего пути из вершины **A** в вершину **B** для графа, изображенного на рис. 4, но уже с ребрами разной длины (рис. 5).

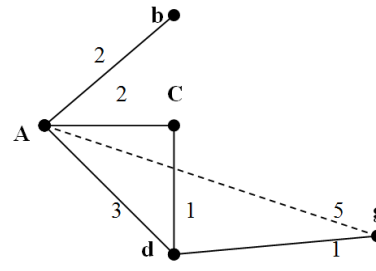


Р и с. 5. Граф, аналогичный изображенному на рис. 4, но с ребрами разной длины

Решение. На рисунке представлено графическое решение этой задачи (рис. 6.1, 6.2). Из начальной вершины **A** проведены все четыре ребра с вершинами **b**, **C**, **g** и **d** соответственно с указанием их длин. Рассмотрим не прямой путь в вершину **g** из начальной вершины **A** через вершину **d**. Его длина $4 < 5$; поэтому рассматриваем этот не прямой путь из вершины **A** в вершину **g**.

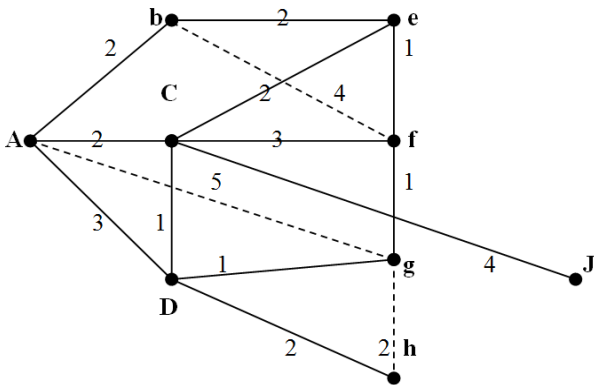


Р и с. 6.1. Первый шаг построения

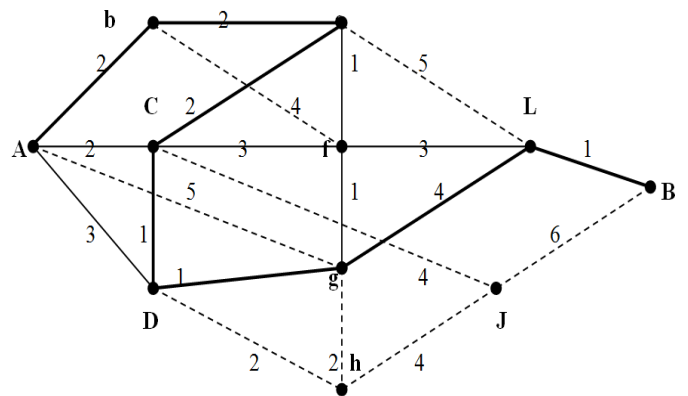


Р и с. 6.2. Второй шаг построения

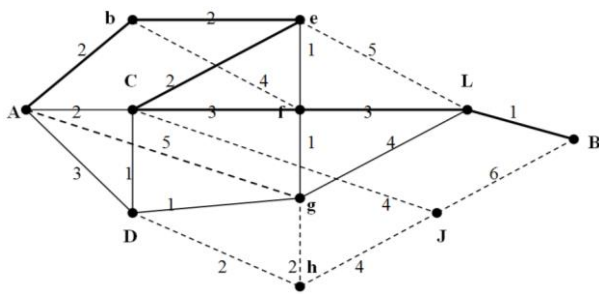
Далее анализируем пути, ведущие из рассмотренных на 2-м шаге вершин; предпочтение отдаем не прямым путям, а наиболее коротким (рис. 6.3). На 4-м шаге процедуры повторяем (рис. 6.4a – 6.4в).



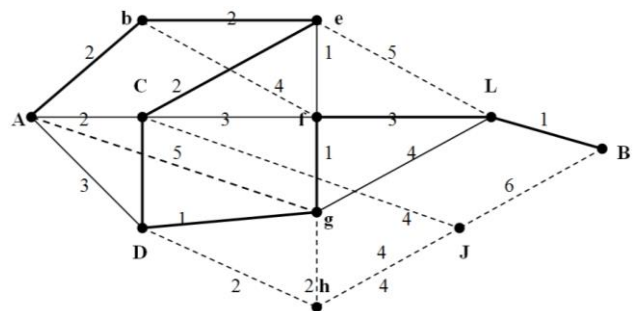
Р и с. 6.3



Р и с. 6.4a



Р и с. 6.4б



Р и с. 6.4в

Кратчайший путь для этой задачи изображен жирным и имеет три варианта решения, его кратчайшая длина для всех трех вариантов одна и та же:

$$2 \quad 2 \quad 2 \quad 1 \quad 1 \quad 4 \quad 1$$

на рис. 6.4a: $A \rightarrow b \rightarrow e \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow g \rightarrow L \rightarrow B$

$$L(\mu) = 2 + 2 + 2 + 1 + 1 + 4 + 1 = 13;$$

$$2 \quad 2 \quad 2 \quad 3 \quad 3 \quad 1$$

на рис. 6.4б: $A \rightarrow b \rightarrow e \rightarrow C \rightarrow f \rightarrow L \rightarrow B$

$$L(\mu) = 2 + 2 + 2 + 3 + 3 + 1 = 13;$$

$$2 \quad 2 \quad 2 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 3 \quad 1$$

на рис. 6.4в: $A \rightarrow b \rightarrow e \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow g \rightarrow f \rightarrow L \rightarrow B$

$$L(\mu) = 2 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 3 + 1 = 13.$$

Рассмотренный метод используется также при реализации моделей управления проектами, сетевого планирования и управления; анализа взаимодействия элементов сложных агрегатов, объединенных в единую систему; системных комплексов; проектов, требующих выполнения большого числа взаимосвязанных операций (работ).

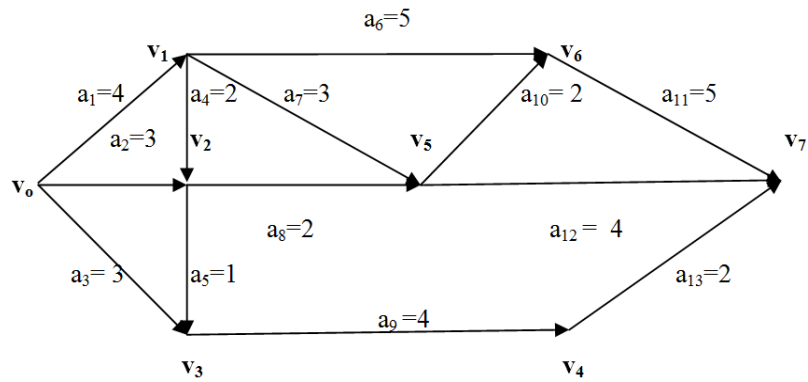
Необходимо отметить, что «работа» понимается в данной ситуации в самом широком смысле:

- как трудовой процесс, требующий затрат времени и ресурсов;
- как ожидание, не требующее затрат труда, но занимающее необходимое для трудового процесса время;
- как фиктивная работа, понимаемая в смысле логической связи между какими-либо операциями, не требующая затрат ни времени, ни ресурсов, но указывающая, что возможность начала данной «работы» непосредственно зависит от результатов некоей предыдущей «работы».

Так, под процессом «работы» крупного энергетического объекта можно предположить: выбор места строительства \rightarrow процесс разработки \rightarrow монтаж и наладка оборудования \rightarrow выполнение комплексной научно-исследовательской темы с участием смежных организаций $\rightarrow \dots$ [1, с. 85].

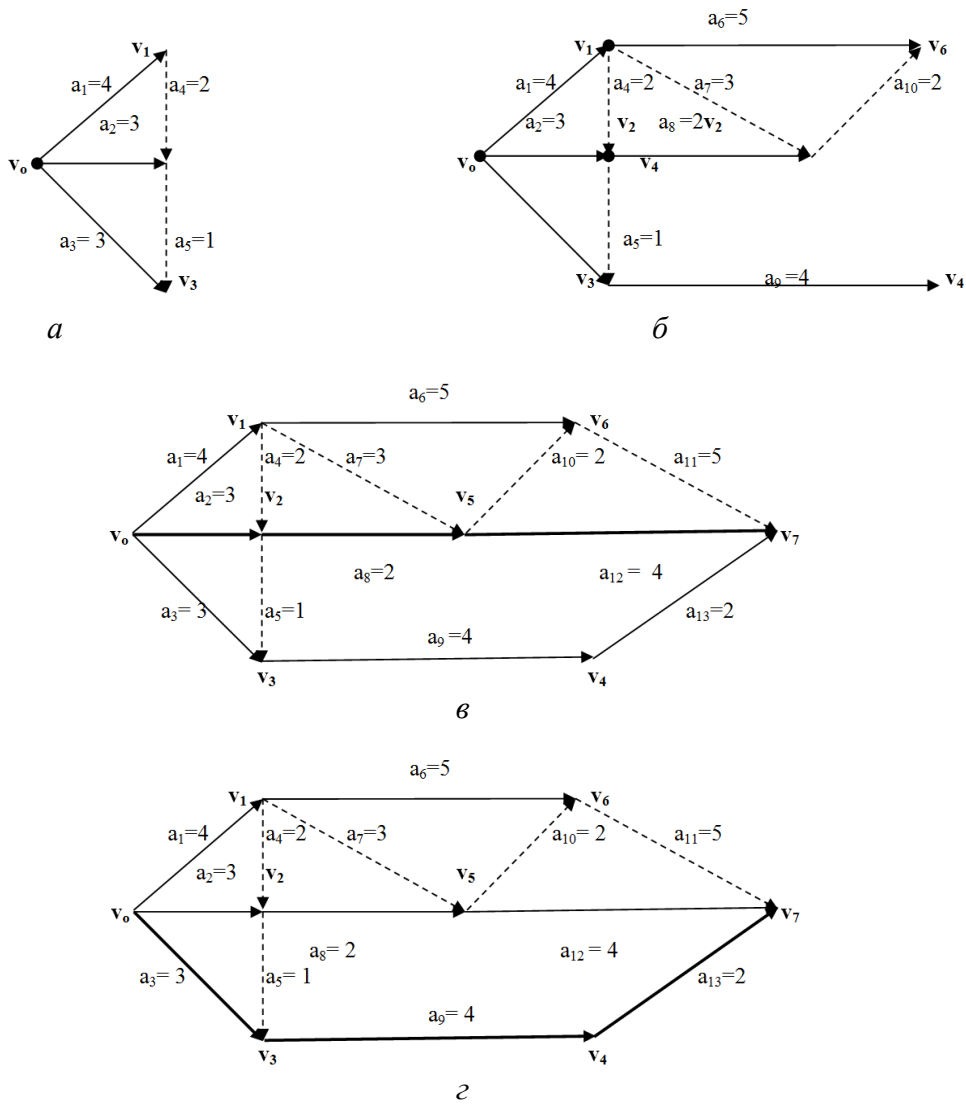
Хотя некоторые операции проекта независимы друг от друга, между ними, как правило, существует достаточно сильная зависимость во времени, например, настройку устройства РЗА энергообъекта можно производить только после предварительных расчетов и монтажа; а ремонт обмотки силового трансформатора – только после отключения и отсоединения его от сети, выемки внутренней части...

Пример 5. Рассмотрим метод нахождения кратчайшего пути из вершины А в вершину В для графа с ребрами разной длины (рис. 7). Интерпретируем этот граф как некую работу, понимаемую в одном из указанных выше смысле.



Р и с. 7. Условие задачи из примера 5

Решение. На рисунке представлено графическое решение этой задачи (рис. 8).



Р и с. 8. Решение задачи из примера 5; а, б, в, г – шаги решения задачи

Замечание. Для решения данной задачи был применен метод,

рассмотренный подробно в п. 1. Найдем кратчайший путь в этой модели. Здесь представлены два варианта нахождения кратчайшей длины:

на рис. 6в: $L(\mu) = \overset{3}{3} + \overset{2}{2} + \overset{4}{4} = 9 : v_0 \rightarrow v_2 \rightarrow v_5 \rightarrow v_7;$

на рис. 6г: $L(\mu) = \overset{3}{3} + \overset{4}{4} + \overset{2}{2} = 9 : v_0 \rightarrow v_3 \rightarrow v_4 \rightarrow v_7.$

В теории надежности при реализации моделей управления проектами, сетевого планирования и управления, анализа и т. д. используется так называемый сетевой график. Напоминаем, что в теории управления и принятия решений сетевым графиком называется график, удовлетворяющий следующим основным требованиям:

а) график не должен иметь «тупиковых» вершин, из которых не выходит ни одна дуга (т. е. нет выхода ни одной работы);

б) график не должен иметь вершин, в которые не выходит ни одна дуга (т. е. не входит ни одна работа);

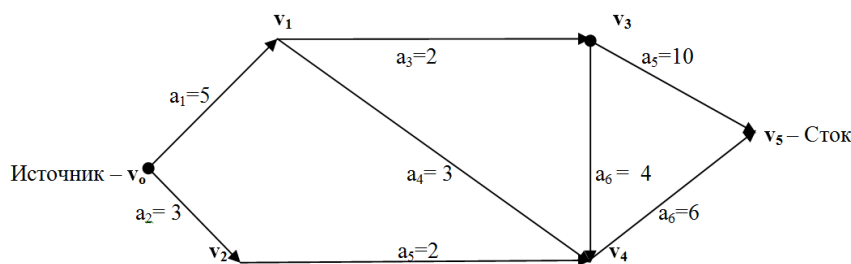
в) график должен быть ациклическим, т. е. без замкнутых контуров и циклов (наличие последних привело бы к тому, что ни одна из операций, входящих в замкнутый контур или цикл, не могла бы начаться первой).

Рассмотрим в качестве примера популярную модель сетевого планирования – так называемую задачу нахождения максимального потока в сети при ограниченных пропускных способностях. *Потоком* в сети называется целочисленная функция φ , определенная на дугах исходного графа. Целое число $0 \leq \varphi(a) \leq c(a)$ называется *потоком по дуге a*. (Значение этой целочисленной функции φ можно интерпретировать как скорость, мощность, потери и т. д.) Если величина потока $\varphi(a)$ равна пропускной способности дуги $c(a)$, то дуга a называется *насыщенной*. Поток называется *полным*, если, по крайней мере, одна из его дуг является насыщенной. Если для всех дуг, инцидентных вершине v , она является начальной, то вершина v называется *источником*, если конечной, то вершина v называется *стоком*.

Пример 6. Для сети энергосистемы, представленной графом, требуется

определить максимальный поток из начальной вершины v_0 в конечную вершину v_7 .

Решение задачи представлено ниже (рис. 9).



Р и с. 9. Решение задачи из примера 6

Применим для решения данной задачи рассмотренный выше метод, который принято оформлять в виде таблицы.

Т а б л и ц а

Дуги	Начальный поток $\Phi(a)$ = 0	Путь $P=\{v_0, v_1, v_3, v_5\}$	Путь $P=\{v_0, v_1, v_4, v_5\}$	Путь $P=\{v_0, v_2, v_4, v_5\}$
v_0, v_1	0	2	5	5
v_0, v_2	0	0	0	2
v_1, v_3	0	2	2	2
v_1, v_4	0	0	3	3
v_2, v_4	0	0	0	2
v_3, v_4	0	0	0	0
v_3, v_5	0	2	2	2
v_4, v_5	0	0	3	5

Пояснение:

- в 3-м столбце дуга $a = \{v_1, v_3\}$ является насыщенной: $\Phi(a) = c(a) = 2$;
 - в 4-м столбце дуга $a = \{v_1, v_4\}$ является насыщенной: $\Phi(a) = c(a) = 3$;
 - в пятом столбце дуга $a = \{v_2, v_4\}$ является насыщенной: $\Phi(a) = c(a) = 2$;
- поэтому максимальный поток будет равен 7: $\Phi(a) = 2 + 3 + 2 = 7$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Папков, Б. В. Надежность электроснабжения. Комплекс учебно-метод. материалов. – Н. Новгород: НТБ НГТУ, 2007. – 212 с.
2. Экономика-математические методы : учеб. пособие / В. Д. Ширяев и др. – Саранск: Изд-во Морд. ун-та, 2006. – 236 с.